Prof. Dr. Alfred Toth

Semiotische Tensoren und Eigenwerte

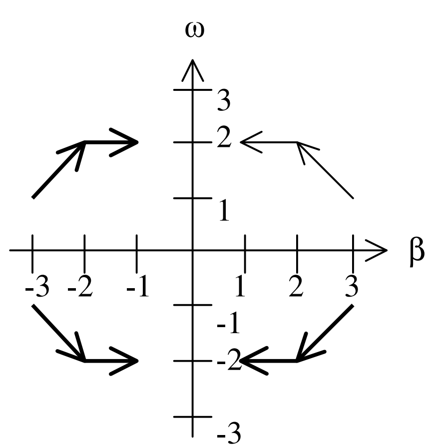
1. In Toth (2007a, S. 48 f.) habe ich im Anschluss an Kidwaii (1997) Zeichenklassen und Realitätsthematiken als semiotische Vektoren und zu ihrer Repräsentation semiotische Vektorräume in Form von 3x3-Matrizen eingeführt. So können etwa die Zeichenklasse (3.1 2.2 1.2) und ihre dual koordinierte Realitätsthematik (2.1 2.2 1.3) wie folgt notiert werden:

$$\text{Zkl } (3.1\ 2.2\ 1.3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Rth } (2.1\ 2.2\ 1.3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bereits zuvor, in Toth (2001), wurde nachgewiesen, dass sich reelle und komplexe Zeichenklassen und Realitätsthematiken wie etwa im folgenden Beispiel:

Zkln mit reellen Primzeichen:	Zkln mit reellen und/oder komplexen Subzeichen:
(3.1 2.2 1.2)	(-3.1 –2.2 –1.2), (3.-1 2.-2 1.-2), (-3.-1 –2.-2 –1.-2), (-3.1 2.-2 –1.-2), (-3.-1 –2.2 1.2), (3.1 –2.-2 –1.2), ...
Rth mit reellen Primzeichen:	Rthn mit reellen und/oder komplexen Subzeichen:
(2.1 2.2 1.3)	(-2.1 –2.2 –1.3), (2.-1 2.-2 1.-3), (-2.-1 –2.-2 –1.-3), (-2.1 2.-2 –1.-3), (-2.-1 –2.2 1.3), (2.1 –2.-2 –1.3), ...

mit Hilfe von linearen Transformationen aufeinander abbilden lassen; vgl. etwa die ersten 4 Zkln ((3.1 2.2 1.2), (-3.1 –2.2 –1.2), (3.-1 2.-2 1.-2), (-3.-1 –2.-2 –1.-2)) im folgenden Graph (komplexe Zkln fett markiert):



Durch die Transformationsmatrizen für Spiegelung, Drehung und Streckung:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x1 \\ -x1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Ax = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x1 \\ -x2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Ax = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x2 \\ x1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Ax = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x1 \\ x1 \end{pmatrix}$$

lassen sich nun die einzelnen Subzeichen ineinander überführen und daher die Zeichenklassen und Realitätsthematiken punktweise von Quadrant zu Quadrant aufeinander abbilden.

2. Da ein Tensor ein unter Koordinatentransformationen invariantes Objekt ist, das aus Vektoren und/oder linearen Abbildungen aufgebaut ist, können unter den genannten Voraussetzungen semiotische Tensoren eingeführt werden. Da Skalare als Tensoren 0. Stufe aufgefasst werden können, stellen die Primzeichen semiotische Tensoren 0. Stufe dar. Weil Spaltenvektoren als Tensoren 1. Stufe betrachtet werden können, ist es möglich, Subzeichen, Dyaden, Zeichenklassen, Realitätsthematiken und komplexere semiotische Gebilde als semiotische Tensoren 1. Stufe zu notieren. Da ferner quadratische Matrizen als Darstellungen von Tensoren 2. Stufe dienen, können, da sowohl Subzeichen wie Zeichenklassen und Realitätsthematiken in Matrizen-Form dargestellt werden können, letztere als semiotische Tensoren 2. Stufe aufgefasst werden.

3. Weil Spiegelungs-, Drehungs- und Streckung-Transformationen Spezialfälle von Laplace-Transformationen sind, bekommen wir semiotische Laplace-Transformationen:

$$F(s) = \underline{L}\{f\}\ (s) = \int_0^{\propto} e^{-st} f(t)\, dt,\ s \in \mathbf{C}$$

wobei wir für $s = i\omega$, d.h. mit reellem ω, die einseitige Fourier-Transformation erhalten:

$$F(\omega) = \underline{F}\ \{f\}\ (\omega) = \underline{L}\ \{f\}\ (i\omega) = F(i\omega) = \int_0^{\propto} e^{-i\omega t} f(t)\, dt$$

Mit Hilfe semiotischer Laplace- bzw. Fourier-Transformationen lassen sich also (3.1 2.2 1.2), (-3.1 –2.2 –1.2), (3.-1 2.-2 1.-2), (-3.-1 –2.-2 –1.-2), (3.-1 –2.-2, 1.2), (3.1 –2.2 1.-2), usw. aufeinander abbilden.

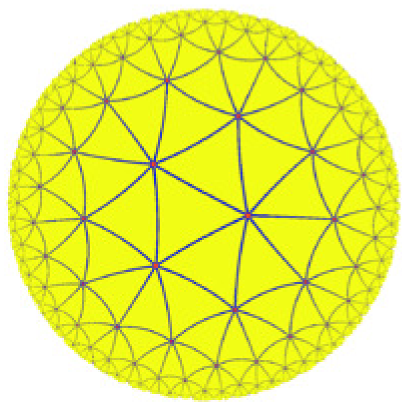
Krümmt man ferner die Ebenen der Quadranten des komplexen semiotischen Koordinatensystems (vgl. Toth 2007b, S. 57 ff.), so erhält man hyperbolische und elliptische (nicht-euklidische) semiotische Mannigfaltigkeiten und kann die linearen Transformationen der reellen und komplexen Zeichenklassen und Realitätsthematiken mittels semiotischer Lorentz-Transformationen darstellen. Für eine lineare Transformation in zwei Dimensionen gilt allgemein:

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha 11 \\ \alpha 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha 12 \\ \alpha 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha 11ct + \alpha 12x \\ \alpha 21ct + \alpha 22x \end{bmatrix}$$

Durch die bekannten hyperbolischen Umformungen erhält man hieraus die folgende Transformationsmatrix:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -v/c\,\gamma \\ -v/c\,\gamma & \gamma \end{bmatrix}$$

Hyperbolische semiotische Dreiecke sehen demnach wie folgt aus:



(Quelle: Wikipedia)

Da semiotische Relativität schon von Bense im Zusammenhang mit Ontizität und Semiotizität des Zeichens diskutiert wurde (vgl. Bense 1983, S. 170 ff.) und sich ganz natürlich aus der relationalen Konzeption des Zeichens ergibt, stellt eine semiotische Relativitätstheorie ein Desiderat dar.

4. Unter den Tensoroperationen heben wir das (äussere) Tensorprodukt hervor. Dieses wird in Matrizenform wie folgt definiert:

$$b \otimes a \rightarrow \begin{bmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{bmatrix} [a1 \;\; a2 \;\; a3] = \begin{bmatrix} a1b1 & a2b1 & a3b1 \\ a1b2 & a2b2 & a3b2 \\ a1b3 & a2b3 & a3b3 \end{bmatrix}$$

Setzen wir nun für ai die triadischen Primzeichen (1., 2., 3.) und für bi die trichotomischen Primzeichen (.1, .2, .3) ein, so erhalten wir das folgende semiotische Tensorprodukt:

$$b \otimes a \rightarrow \begin{bmatrix} .1 \\ .2 \\ .3 \end{bmatrix} [1. \;\; 2. \;\; 3.] = \begin{bmatrix} 1.1 & 2.1 & 3.1 \\ 1.2 & 2.2 & 3.2 \\ 1.3 & 2.3 & 3.3 \end{bmatrix}$$

und das sind genau die 9 Subzeichen der kleinen semiotischen Matrix zeilenweise trichotomisch und spaltenweise triadisch angeordnet. Da die übrigen Tensoroperationen sich im semiotischen Falle mit den entsprechenden Vektoroperationen decken, gelten natürlich die in Toth (2007a, S. 50 ff.) aufgestellten Körperoperationen, in Sonderheit das Gesetz, dass die Addition von semiotischen Vektoren stets 0 ergibt.

5. Wie üblich, verstehen wir unter einer Diagonalmatrix eine quadratische Matrix, bei der alle Elemente ausserhalb der Hauptdiagonale 0 sind. Die Eigenwerte einer Diagonalmatrix sind nun die Einträge auf der Hauptdiagonale mit den kanonischen Einheitsvektoren als Eigenvektoren. Ein Eigenwert λ genügt also der folgenden Matrizengleichung:

$$Ax = \lambda x$$

Eigenvektoren sind ferner paarweise orthogonal zueinander. Schauen wir nun die Zeichenklassen an, so sind (3.1 2.1 1.2), (3.1 2.1 1.3), (3.1 2.3 1.3) und (3.2 2.3 1.3) keine Diagonalmatrizen. Die restlichen Zeichenklassen einschliesslich der "Genuinen Kategorienklasse" (3.3 2.2 1.1) weisen die folgenden Diagonalstrukturen auf:

(3.1 2.1 1.1): (3.1 2.2 1.2): (3.1 2.2 1.3): (3.2 2.2 1.2): (3.2 2.2 1.3): (3.3 2.3 1.3):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3.3 2.2 1.1):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gibt also nur die folgenden 4 semiotischen Diagonaltypen:

[1 0 0]: (3.1 2.1 1.1)
[0 1 0]: (3.1 2.2 1.2), (3.1 2.2 1.3), (3.2 2.2 1.2), (3.2 2.2 1.3)
[0 0 1]: (3.3 2.3 1.3)
[1 1 1]: (3.3 2.2 1.1)

Als semiotische Eigenwerte bzw. Eigenvektoren fungieren auf der Ebene der Zeichenklassen bzw. Realitätsthematiken also die Subzeichen (3.1, 2.2, 1.3), die, wenn man sich die obigen Matrizen und ihre Transponierten (3.1 $\times$ 1.3) anschaut, tatsächlich paarweise orthognal zueinander sind. Paarweise Orthogonalität ihrer konstituierenden Subzeichen scheint daher eine weitere wichtige Eigenschaft für die von Max Bense (1992) bestimmte Eigenrealität der Zeichen zu sein, d.h. Eigenrealität setzt offenbar die Subzeichen der Zeichenklasse (3.1 2.2 1.3) als Eigenwerte bzw. Eigenvektoren voraus, weshalb man diese Zeichenklasse des "Zeichens selbst", der "Zahl" und des "ästhetischen Zustandes" auch als Zeichenklasse des "Eigenwertes" bezeichnen könnte.

Da aber mit dem Gesetz der Körpermultiplikation gilt:

$$(3.1)\quad (3.1\ 2.1\ 1.1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (3.1), \text{usw.},$$

d.h. für jedes Subzeichen (a.b) mit a, b ∈ {1, 2, 3}: (a.b) (a.b) = 1, stellt auf der Ebene der Subzeichen jedes Subzeichen einen Eigenwert dar, nämlich den Eigenwert für sich selbst. Daher ist die Genuine Kategorienklasse die einzige "Zeichenklasse", die ihren eigenen Eigenwert repräsentiert.

Literatur

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1983

Bense, Max, Die Eigenrealität der Zeichen. Baden-Baden 1992

Kay, David C., Tensor Calculus. McGraw-Hill 1988

Kidwaii, Hariss, Die Basistheorie der Semiotik und die Kleine Matrix. In: Semiosis 85-90 (1997), S. 311-317

Toth, Alfred, Lineare Transformationen in einer komplexen Semiotik. In: Grundlagenstudien aus Kybernetik und Geisteswissenschaft 42/3 (2001), S. 103-112

Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. Klagenfurt 2007 (2007a)

Toth, Alfred, Zwischen den Kontexturen. Klagenfurt 2007 (2007b)